

**Приклад розв'язання завдань контрольної роботи на основі розв'язання
Дейнеко І. В. та задач підручника Жураковського Ю. П., Полторака В. П.
"Теорія інформації та кодування"**

Завдання 1. Алфавіт джерела повідомлень містить 879 символів. Кожне повідомлення складеться з 57 рівноймовірних знаків. Передано 555 повідомлень. Яка загальна кількість інформації?

Розв'язання:

$$m = 879, n = 57$$

Кількість інформації, яка міститься в одному повідомленню обраховується за формулою Хартлі:

$$I = n \cdot \log_2 m = 57 \cdot \log_2 879 = 57 \cdot 9.7797 = 557.444 \text{ біт}$$

Загальна кількість інформації:

$$I_{555} = I \cdot 555 = 557.444 \cdot 555 = 309381.4 \text{ біт}$$

Завдання 2. Джерела А та В мають розподіли ймовірностей повідомлень, наведені нижче. Ентропія якого джерела більша? Яка максимальна ентропія цього джерела та за якої умови?

$$P_A = \{0,007; 0,003; 0,007; 0,003; 0,98\} \quad P_B = \{0,007; 0,003; 0,007; 0,003; 0,98\}$$

Розв'язання:

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
P_a	0,005	0,0025	0,0025	0,005	0,985
$I(a_i)$	7,643856	8,643856	8,643856	7,643856	0,021804

$$H(A) = \sum_i P(a_i) I(a_i) = \sum_i P(a_i)$$

$$H(A) = \begin{matrix} 0,038219 & 0,02161 & 0,02161 & 0,038219 & 0,021477 \\ & & & & 0,141135 \end{matrix}$$

b_i	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
P_b	0,007	0,003	0,007	0,003	0,98
$I(a_i)$	7,158429	8,380822	7,158429	8,380822	0,029146

$$H(B) = \sum_i P(b_i) I(b_i) = \sum_i P(b_i)$$

H(B)=	0,050109	0,025142	0,050109	0,025142	0,028563
					0,179066

Завдання 3. При передачі інформації рядками по 80 цифр на кожні 25 рядків цифра 5 зустрічається 40 разів, цифра 9 – 30 разів, число 59 – 20 разів, 95 – 16 разів. Визначити ймовірності появи цифр 5 та 9, чисел 59 та 95, умовну ймовірність появи цифри 5, якщо з'явилася цифра 9 та цифри 9, якщо з'явилася цифра 5.

Розв'язання:

$N_5 =$	40	$N_9 =$	30	$N =$	2000
$N_{59} =$	20	$N_{95} =$	16		
$P_5 =$	0,02	$P_9 =$	0,015	$P(5/9) =$	0,5
$P_{59} =$	0,01	$P_{95} =$	0,008	$P(9/5) =$	0,533333

Завдання 4. Ансамбль повідомлень джерела A визначено як $A = \{0,1\}$ та $P_A = \{0,95; 0,05\}$. Статистична залежність повідомлень характеризується умовними ймовірностями $P(0/1) = 0,05$, $P(1/0) = 0,07$. Визначити часткову та загальну ентропію цього джерела.

Розв'язання:

$P(0/1) =$	0,05	$k =$	2	$H_0(A) =$	0,338856	$P(0) =$	0,95
$P(1/0) =$	0,07	$l =$	2	$H_1(A) =$	0,24796	$P(1) =$	0,004
$P(1/1) =$	0,95	$P(0) =$	0,004	$H(A) =$	0,248323		
$P(0/0) =$	0,93	$P(1) =$	0,996				

Завдання 5. Дослідження каналу зв'язку між джерелом A та спостерігачем B виявило такі умовні ймовірності вибору повідомлень $b_i \in B$:

$$p(b_j | a_i) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.01 & 0.09 \\ 0.04 & 0.06 & 0.9 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Визначити часткову та загальну умовну ентропію в цьому каналі при рівноймовірному виборі джерелом A та при $P_A = \{0,3; 0,3; 0,4\}$.

Розв'язання:

Часткова умовна ентропія обраховується за формулою:

$$H(B|a_i) = -\sum_{j=1}^n p(b_j|a_i) \cdot \log_2 (b_j|a_i), i = \overline{1, n}$$

$$H(B|a_1) = -(0.9 \cdot \log_2 0.9 + 0.01 \cdot \log_2 0.01 + 0.09 \cdot \log_2 0.09) = 0.515895 \text{ біт}$$

$$H(B|a_2) = -(0.04 \cdot \log_2 0.04 + 0.06 \cdot \log_2 0.06 + 0.9 \cdot \log_2 0.9) = 0.566091 \text{ біт}$$

$$H(B|a_3) = -(0.05 \cdot \log_2 0.05 + 0.9 \cdot \log_2 0.9 + 0.05 \cdot \log_2 0.05) = 0.568996 \text{ біт}$$

Загальна умовна ентропія обраховується за формулою:

$$H(B|A) = \sum_{i=1}^n p(a_i) \cdot H(B|a_i)$$

Загальна умовна ентропія при рівноймовірному виборі джерелом А :

$$H(B|A) = \frac{1}{3} (0.515895 + 0.566091 + 0.568996) = 0.550327 \text{ біт}$$

Загальна умовна ентропія при $P_A = \{0,3; 0,3; 0,4\}$:

$$H(B|A) = 0.3 \cdot 0.515895 + 0.3 \cdot 0.566091 + 0.4 \cdot 0.568996 = 0.552194 \text{ біт}$$

Завдання 6. Два статистично незалежних джерела А та В визначаються матрицею сумісних імовірностей:

$$p(a_i, b_j) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.05 & 0.02 & 0.13 \end{bmatrix}$$

Визначити часткову та загальну умовну ентропію, ентропію об'єднання, безумовну ентропію цих джерел, а також кількість інформації, що припадає

на пару повідомлень a_i, b_j .

Розв'язання:

Знаходимо розподіл ймовірностей джерел А та В :

$$p(a_1) = 0.1 + 0.1 + 0.05 = 0.25$$

$$p(a_2) = 0.1 + 0.2 + 0.02 = 0.32$$

$$p(a_3) = 0.1 + 0.2 + 0.13 = 0.43$$

$$p(b_1) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$$

$$p(b_2) = 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.5$$

$$p(b_3) = 0.05 + 0.02 + 0.13 = 0.2$$

Обраховуємо матриці умовних ймовірностей:

$$p(a|b) = \frac{p(a,b)}{p(b)}, \quad p(b|a) = \frac{p(a,b)}{p(a)}$$

$$p(a_i|b_j) = \begin{bmatrix} \frac{0.1}{0.3} & \frac{0.1}{0.3} & \frac{0.1}{0.3} \\ \frac{0.1}{0.5} & \frac{0.2}{0.5} & \frac{0.2}{0.5} \\ \frac{0.05}{0.2} & \frac{0.02}{0.2} & \frac{0.13}{0.2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.25 & 0.1 & 0.65 \end{bmatrix}$$

$$p(b_i|a_j) = \begin{bmatrix} \frac{0.1}{0.25} & \frac{0.1}{0.32} & \frac{0.1}{0.43} \\ \frac{0.1}{0.25} & \frac{0.2}{0.32} & \frac{0.2}{0.43} \\ \frac{0.05}{0.25} & \frac{0.02}{0.32} & \frac{0.13}{0.43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3125 & 0.232558 \\ 0.4 & 0.625 & 0.465116 \\ 0.2 & 0.0625 & 0.302325 \end{bmatrix}$$

Часткова умовна ентропія:

$$H(A|b_j) = -\sum_{i=1}^n p(a_i|b_j) \cdot \log_2(a_i|b_j), i = \overline{1, n}$$

$$H(A|b_1) = -(0.3333 \cdot \log_2 0.3333 + 0.3333 \cdot \log_2 0.3333 + 0.3333 \cdot \log_2 0.3333) = 1.584962$$

$$H(A|b_2) = -(0.2 \cdot \log_2 0.2 + 0.4 \cdot \log_2 0.4 + 0.4 \cdot \log_2 0.4) = 1.521928$$

$$H(A|b_3) = -(0.25 \cdot \log_2 0.25 + 0.1 \cdot \log_2 0.1 + 0.65 \cdot \log_2 0.65) = 1.23616$$

$$H(B|a_i) = -\sum_{j=1}^n p(b_j|a_i) \cdot \log_2(b_j|a_i), i = \overline{1, n}$$

$$H(B|a_1) = -(0.4 \cdot \log_2 0.4 + 0.4 \cdot \log_2 0.4 + 0.2 \cdot \log_2 0.2) = 1.521928$$

$$H(B|a_2) = -(0.3125 \cdot \log_2 0.3125 + 0.625 \cdot \log_2 0.625 + 0.0625 \cdot \log_2 0.0625) = 1.198192$$

$$H(B|a_3) = -(0.232558 \cdot \log_2 0.232558 + 0.465116 \cdot \log_2 0.465116 + 0.302325 \cdot \log_2 0.302325) = 1.524787$$

Загальна умовна ентропія:

$$H(A|B) = \sum_{i=1}^n p(b_i) H(A|b_i) = 0.25 \cdot 1.584962 + 0.32 \cdot 1.521928 + 0.43 \cdot 1.23616 = 1.414806$$

$$H(B|A) = \sum_{i=1}^n p(a_i) H(B|a_i) = 0.3 \cdot 1.521928 + 0.5 \cdot 1.198192 + 0.2 \cdot 1.524787 = 1.360632$$

Безумовна ентропія:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^n p(a_i) \cdot \log_2(a_i) = -(0.25 \cdot \log_2 0.25 + 0.32 \cdot \log_2 0.32 + 0.43 \cdot \log_2 0.43) = 1.549598$$

$$H(B) = -\sum_{i=1}^n p(b_i) \cdot \log_2(b_i) = -(0.3 \cdot \log_2 0.3 + 0.5 \cdot \log_2 0.5 + 0.2 \cdot \log_2 0.2) = 1.485479$$

Ентропія об'єднання:

$$H(AB) = H(A) + H(B|A) = H(B) + H(A|B) = 1.549598 + 1.360632 \approx 2.9$$

Також ентропію об'єднання можна обрахувати за формулою:

$$H(AB) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(a_i, b_j) \log_2 p(a_i, b_j)$$

Кількість інформації, що припадає на пару повідомлень $a_i, b_j = 2,9$ біт.

Завдання 7. Повідомлення передаються взаємозалежними, рівноймовірними символами тривалістю $62 \cdot 10^{-5}$ с. Визначити продуктивність джерела повідомлень та швидкість передачі кожного символу, якщо обсяг алфавіту дорівнює 72.

Розв'язання:

Так як повідомлення передаються рівноймовірними символами, середня тривалість передачі одного символу:

$$\tau_{сер} = \tau_i = 62 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

Обсяг алфавіту: $m=72$.

Безумовна ентропія джерела А:

$$H(A) = \log_2 m = \log_2 72 = 6.169925 \text{ біт}$$

$$I(A,B) = H(A)$$

Для каналу зв'язку без завад

Продуктивність джерела повідомлень та швидкість передачі кожного символу:

$$V_{\text{дж}} = \frac{H(A)}{\tau_{\text{сер}}} = \frac{\log_2 72}{62 \cdot 10^{-5}} = 9951.49 \text{ біт/с}$$

Завдання 8. Визначити пропускну здатність каналу зв'язку між джерелами А та В матриця ймовірностей якого при $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ с має вигляд:

$$p(a_i, b_j) = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.1 & 0.08 \\ 0.3 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.02 & 0.12 \end{bmatrix}$$

Розв'язання:

$$p(b_1) = 0.08 + 0.1 + 0.08 = 0.26$$

$$p(b_2) = 0.3 + 0.2 + 0.05 = 0.55$$

$$p(b_3) = 0.05 + 0.02 + 0.12 = 0.19$$

Обраховуємо матрицю умовних ймовірностей $p(a|b) = \frac{p(a,b)}{p(b)}$:

$$p(a_i | b_j) = \begin{bmatrix} \frac{0.08}{0.26} & \frac{0.1}{0.26} & \frac{0.08}{0.26} \\ \frac{0.3}{0.55} & \frac{0.2}{0.55} & \frac{0.05}{0.55} \\ \frac{0.05}{0.19} & \frac{0.02}{0.19} & \frac{0.12}{0.19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.307692 & 0.384615 & 0.307692 \\ 0.545455 & 0.363636 & 0.090909 \\ 0.263158 & 0.105263 & 0.631579 \end{bmatrix}$$

Часткові умовні ентропії:

$$H(A|b_j) = -\sum_{i=1}^n p(a_i | b_j) \log_2 (a_i | b_j), \quad j = \overline{1, n}$$

$$H(A|b_1) = -(0.307692 \cdot \log_2 0.307692 + 0.384615 \cdot \log_2 0.384615 + 0.307692 \cdot \log_2 0.307692) = 1.576621$$

$$H(A|b_2) = -(0.545455 \cdot \log_2 0.545455 + 0.363636 \cdot \log_2 0.363636 + 0.090909 \cdot \log_2 0.090909) = 1.322179$$

$$H(A|b_3) = -(0.263158 \cdot \log_2 0.263158 + 0.105263 \cdot \log_2 0.105263 + 0.631579 \cdot \log_2 0.631579) = 1.267444$$

Загальна умовна ентропія:

$$H(A|B) = \sum_{i=1}^n p(b_i) \cdot H(A|b_i) = 1.576621 \cdot 0.26 + 1.322179 \cdot 0.55 + 1.267444 \cdot 0.19 = 1.377934$$

Безумовна ентропія:

$$H(A) = \log_2 m = \log_2 3 = 1.584963$$

Пропускна здатність каналу зв'язку:

$$C = \frac{H(A) - H(A|B)}{\tau} = \frac{1.584963 - 1.377934}{5 \cdot 10^{-5}} = 4140.56 \text{ біт/с}$$